Die Kunst der richtigen Entscheidung

Bei Ungewissheit sind Fehlentscheidungen nicht vermeidbar; aber unter bestimmten Voraussetzungen hilft ein neues und einfaches mathematisches Verfahren, sie auf ein Minimum zu beschränken. Das hilft bei Entscheidungen im Alltag ebenso wie bei schwierigen Konflikten in der Medizin.

Von F. Thomas Bruss

Wenn es etwas gibt, was einen verantwortungsbewussten Entscheidungsträger wirklich verletzt, dann sind es diese vorwurfsvollen Fragen, die im Nachhinein niemandem etwas bringen. Manager, Ärzte, Makler, Unternehmensberater, Politiker, …, Sie und ich, wir alle kennen solche Fragen:

»Warum sind Sie damals noch eingestiegen, obwohl …? Warum haben Sie die Behandlung nicht abgebrochen, als klar war …? Warum haben Sie die Aktien nicht verkauft, als noch …? Warum haben Sie damit nicht bis zum Wahlkampf gewartet, wo doch …?«

Der Arzt, dem man plötzlich vorwirft, unnötiges Leiden verursacht zu haben, weiß, warum er die Behandlung nicht abgebrochen hatte. Eben weil die Sache nicht so klar war und seine Patienten sich an diese letzte Hoffnung geklammert hatten. Ählich geht es Managern, Maklern, Politikern, …, die alle nur bitter lachen können über diejenigen, die es im Nachhinein besser wissen. Es ist eben leichter, ein Stück Zukunft vorauszusagen, wenn es schon vorbei ist. (Antworten Sie auf solche Fragen nie mit »Wie hätten Sie es gemacht?« Strategisch geschickter ist eine Antwort wie »Wissen Sie, wenn ich zwischen Fehlern wählen kann, mache ich immer einen, den ich noch nicht probiert habe«, selbst auf die Gefahr hin, dass es provokativ klingt.)

Für jeden, der in einer solchen Entscheidungssituation steckt, hält die Mathematik ein Hilfsmittel bereit. Es ist überraschend einfach und erfordert nur die Anwendung der Grundrechenarten; oft genügt Kopfrechnen. Gleichwohl dient es Ihnen auf zweierlei Art: erstens und hauptsächlich, um eine gute Entscheidung zu treffen; zweitens zu Ihrer Absicherung, damit Ihnen, wenn etwas schief geht, mehr als nur Ihr Humor zur Seite steht. Es handelt sich um eine neue Methode (einen »Algorithmus«) zur Berechnung der optimalen Strategie für gewisse Entscheidungen bei unbekannter Zukunft.

Eine mathematische Strategie kann kein Wundermittel sein. Sie kann Erfahrungen oder Fingerspitzengefühl nicht ersetzen, wohl aber diese besser nutzen. Wenn sie zusätzlich beweisbar optimal ist, dann sollten wir ihr all unsere Aufmerksamkeit widmen, denn nichttriviale optimale Strategien sind rar. Die Strategie, die ich hier vorstelle, ist optimal.

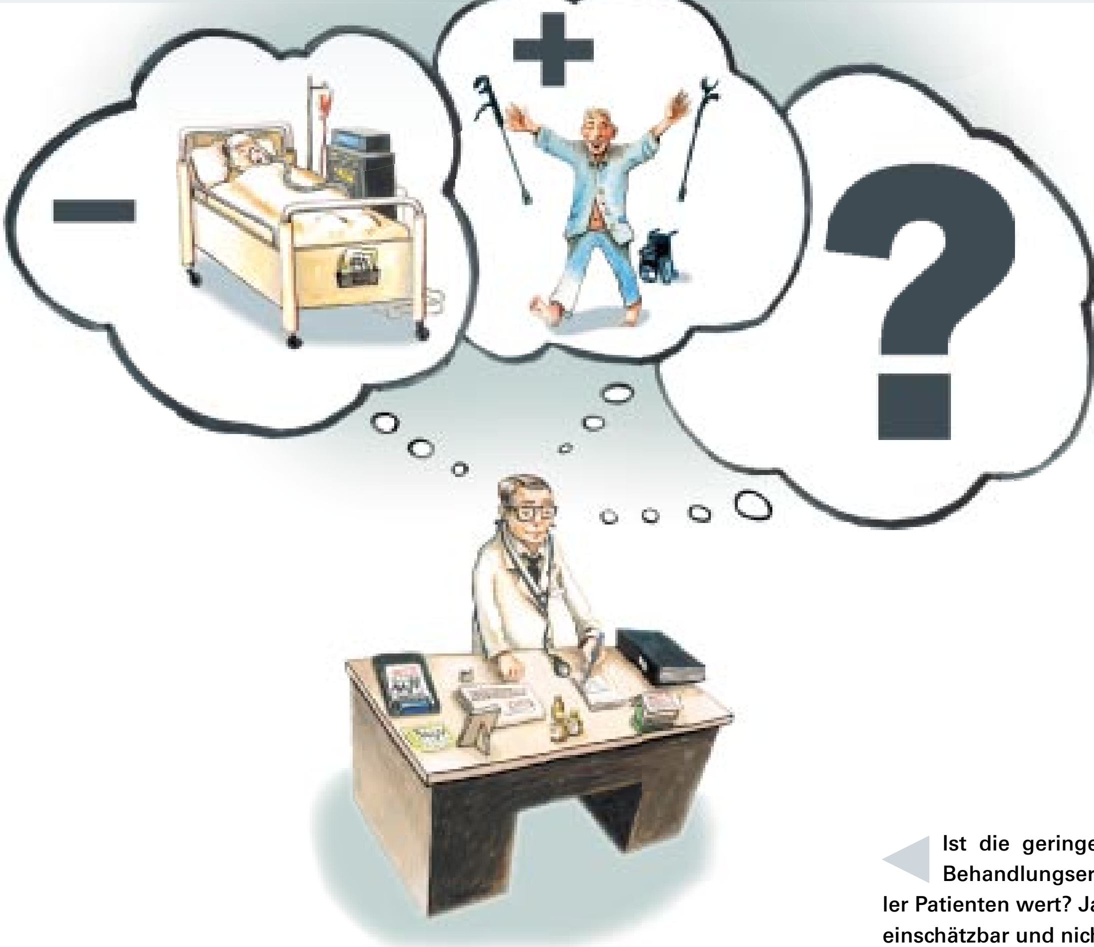
Auf die letzte Gelegenheit kommt es an

Zur Erklärung beginnen wir mit einigen Beispielen, und zwar zunächst nicht mit einer dramatischen Entscheidungssituation, sondern mit einem einfachen Spiel. Denn dort treten, im Gegensatz zur komplizierten Realität, die mathematischen Strukturen klarer hervor.

Ein Würfel wird genau zwölfmal geworfen. Sowie eine Sechs kommt, dürfen Sie auf der Stelle ansagen, ob das Ihrer Ansicht nach die letzte Sechs in der Reihe der Würfe war; dann wird weitergewürfelt. Wenn Sie am Ende Recht behalten, gewinnen Sie; andernfalls gewinnt die Bank. Wenn zum Beispiel die Folge der Würfe 3, 6, 4, 1, 2, 6, 3, 6, 2, 5, 1, 3 ist, dann gewinnen Sie nur, wenn Sie unmittelbar nach dem achten Wurf die dritte Sechs korrekt als die letzte deklariert haben. Wenn gar keine Sechs fällt, gewinnt ebenfalls die Bank. Nach welchem Prinzip sollten Sie Ihr Verhalten – schweigen oder ansagen – wählen?

Das zweite, sehr ernsthafte Beispiel bezieht sich auf klinische Versuche. Schwer kranke Patienten sind oft bereit, für eine noch unklare Hoffnung auf Besserung hohe Risiken und Unannehmlichkeiten einzugehen, wie sie zum Beispiel bei extrem hohen Dosierungen in der Chemotherapie auftreten. Sie stellen damit Ärzte vor schwierige Entscheidungsprobleme. Die Behandlung ist neu und wenig erprobt; die Erfolgsaussichten sind also noch kaum einschätzbar. Deshalb wird in diesen so genannten »compassionate use trials« eine kleine Anzahl von Patienten nacheinander behandelt, sodass jeder Patient von den Erfahrungen seiner Vorgänger profitieren kann. Insbesondere kann man die Behandlung abbrechen oder gar nicht erst aufnehmen, falls und wenn klar wird, dass die Erfolgsrate ein Leiden weiterer Patienten nicht rechtfertigt. Aber wann genau ist das der Fall? An welche ethischen Richtlinien sollte sich ein guter Arzt halten?

Das dritte Beispiel ist wiederum gänzlich anderer Natur. Sie wollen Ihren schicken Sportwagen verkaufen, sagen wir innerhalb eines Monats. Interessenten schauen vorbei und machen jeweils



ALLE ILLUSTRATIONEN DIESES ARTIKELS: ANDREAS RZADKOWSKY / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Ist die geringe Chance auf einen Behandlungserfolg das Leiden vieler Patienten wert? Ja – wenn die Chance einschätzbar und nicht allzu gering ist.

ein Angebot. Das können Sie annehmen oder auch nicht; aber ein potenzieller Käufer, dessen Angebot Sie ablehnen, kommt nie wieder (vergleiche Spektrum der Wissenschaft 5/2004, S. 102). Natürlich wollen Sie, wenn irgendwie möglich, dem höchsten aller – bisherigen wie zukünftigen – Angebote den Zuschlag geben. Wie sollten Sie vorgehen?

Was haben diese drei so verschieden aussehenden Probleme gemeinsam?

Im Spiel geht es um die letzte Sechs, das heißt um ein letztes spezifisches Ereignis. Der Arzt steht überraschenderweise vor dem gleichen Grundproblem. Warum?

Stellen wir uns für einen Moment vor, der Arzt hätte prophetische Fähigkeiten und könnte die Ergebnisse aller Behandlungen vorhersehen, die er überhaupt in Erwägung zieht. Zum Beispiel stehen zehn Patienten zur Behandlung an, und die Ergebnisse wären der Reihe nach – + – – + – – – – –. Dabei steht ein Pluszeichen für einen Erfolg, ein Minuszeichen für einen Misserfolg, wie auch immer Erfolg und Misserfolg in dieser Versuchsreihe definiert sein mögen. Dann würde der Arzt nach der fünften Behandlung die Versuchsreihe abbrechen, womit er alle überhaupt möglichen Erfolge erzielt und zugleich das unnötige Leiden der letzten fünf Patienten verhindert hätte. Der Arzt ist aber kein Prophet. Deshalb bleibt ihm nur die Möglichkeit, das letzte Plus zu erraten. Das ist im Prinzip dieselbe Aufgabe wie das Erraten der letzten Sechs im Würfelspiel. Nur kennt er, im Gegensatz zum Würfelspiel, die Wahrscheinlichkeit für ein Plus nicht, sondern muss versuchen, sie aus der bisherigen Erfahrung zu schätzen und nach dieser Einschätzung zu handeln.

Der Sportwagenverkäufer schließlich hat ein Problem des gleichen Typs; das sieht er aber erst, wenn er es geeignet formuliert. Er vergibt für ein Angebot das Kennzeichen *H* (»hoch«), wenn es höher ist als alle vorhergehenden, und *T* (»tief«) im anderen Fall. Dann stellt sich ihm die Reihe der Angebote – die er noch nicht vollständig kennt – als eine Folge aus *H*s und *T*s dar. Annehmen möchte er nur auf einem *H*, und am liebsten auf dem letzten *H* der Folge, denn das ist, wie man sich leicht überlegt, das höchste Angebot von allen.

Wie man sieht, spielt das letzte Ereignis einer bestimmten Art oft eine besondere Rolle, im Spiel wie im praktischen Leben. Da man große Freiheiten hat zu definieren, was ein interessantes Ereignis sein soll (eine Sechs, ein Behandlungserfolg, ein *H*), erlaubt unsere Formulierung Ziele recht verschiedener Natur. Es gibt viele andere Situationen, in denen ein letztes besonderes Ereignis (nennen wir es im Folgenden »Gelegenheit«) eine große Rolle spielt. Denn das hat das Leben so an sich: Wenn man diese letzte Gelegenheit verpasst hat, gibt es kein Zurück mehr.

Unabhängigkeit und Ungewissheit

Ein zweiter gemeinsamer Faktor ist die Unabhängigkeit. Jeder Wurf des Würfels ist unabhängig von anderen Würfen; jeder Patient reagiert auf eine Behandlung unabhängig von anderen Patienten. In vielen anderen Situationen sind Gelegenheiten unabhängig voneinander. Das gilt auch für das Verkaufsbeispiel, was allerdings weniger offensichtlich ist und bewiesen werden muss.

Schließlich kommt als dritter gemeinsamer Faktor die Ungewissheit der ▷

▷ Zukunft ins Spiel. Wir wissen nicht, wann die letzte Sechs, das letzte Plus oder das höchste Angebot kommt. Deterministische Planung muss somit durch Wahrscheinlichkeitsüberlegungen ersetzt werden.

An dieser Stelle beginnt nun die mathematische Modellierung. Wir sprechen nicht mehr vom Wurf eines Würfels, einer medizinischen Behandlung oder einem Kaufinteressenten, sondern schlicht von einem Ereignis. Ein solches Ereignis kann uninteressant sein (keine Sechs, niedriges Kaufangebot) oder interessant, in welchem Fall wir es eine Gelegenheit nennen. Nur bei Gelegenheiten (Sechsen, bisher höchsten Angeboten) erwägen wir überhaupt, darauf einzugehen.

Unsere Unsicherheit beschreiben wir, indem wir jeder Gelegenheit eine Wahrscheinlichkeit zuschreiben: Die Wahrscheinlichkeit, dass das k-te Ereignis eine Gelegenheit ist, nennen wir p_k. Für den Würfel ist das einfach: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sechs kommt, ist 1/6. Beim Sportwagen ist es etwas komplizierter, weil die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Gelegenheit handelt, mit jedem weiteren Interessenten geringer wird (Kasten unten). Beim klinischen Versuch muss der Arzt das Wissen um die Wahrscheinlichkeiten im Verlauf des Versuchs erst erwerben. Ähnliches gilt für Investitionsentscheidungen und viele andere Probleme.

Hat man aber diese Wahrscheinlichkeiten oder wenigstens eine gute Schätzung dafür, dann ist der Rest eine einfache Rechenübung. Man erhält als Ergebnis eine Zahl s, den so genannten Stoppindex. Die optimale Strategie lautet dann: Warte bis zum s-ten Ereignis und ergreife von da an die erste Gelegenheit, wenn es noch eine gibt.

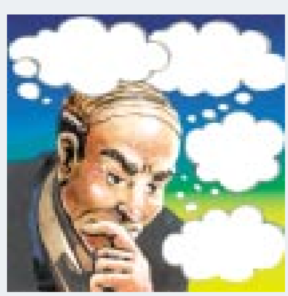
Die Theorie liefert auch eine Aussage über die Erfolgsrate dieser Strategie: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir die beste aller möglichen Entscheidungen treffen, liegt stets über 36,7 Prozent und typischerweise bei 40 Prozent und mehr.

Solche Erfolgszahlen klingen nicht unbedingt beeindruckend. Mancher Entscheidungsträger mag das Gefühl haben, dass er im Schnitt besser liegt. Aber Vorsicht! Gefühl und Wirklichkeit sind verschiedene Dinge. Wenn ein Makler nach vier Wochen eine schöne Villa zu einem bisherigen Höchstpreis verkauft, so sieht er vor sich und seinen Kunden sehr erfolgreich aus. Schon ist vergessen, dass die Kunden ihm vier Monate Zeit für den Verkauf gelassen hatten. Nach dem Verkauf gibt es keine weitere Besichtigungen, also weiß man nicht, welche Angebote in den drei nächsten Monaten noch eingegangen wären. Vielleicht hätte schon das nächste den Abschlusspreis übertroffen. Dann wäre der Erfolg nur ein Pseudoerfolg.

Der Odds-Algorithmus

Sei E_1, E_2, …, E_n eine Folge von n unabhängigen Ereignissen. Wir können sie nacheinander beobachten und als »Gelegenheit« oder als uninteressant klassifizieren. Sei p_k die Wahrscheinlichkeit, dass E_k sich als Gelegenheit herausstellt. Für genau eine Gelegenheit dürfen wir uns entscheiden und damit die Folge der Ereignisse abbrechen; dafür hat sich aus dem Englischen der Ausdruck »stoppen« eingebürgert.

Wie finden wir die p_k? Im Würfelbeispiel ist die Unabhängigkeitsbedingung zweifellos erfüllt, und jede Sechs ist eine Gelegenheit, also ist $p_k = 1/6$ für alle k. Für den Sportwagenverkäufer sind die H die Gelegenheiten und $p_k = 1/k$, denn alle Reihenfolgen, in denen die Angebote eingehen könnten, sind gleich wahrscheinlich. Also kommt das höchste unter den ersten k Angeboten mit gleicher Wahrscheinlichkeit an erster, zweiter, … k-ter Stelle. Bei dem klinischen Versuch muss man die p_k schätzen (siehe unten).



Wir definieren noch $q_k = 1 - p_k$, das heißt, q_k ist die Wahrscheinlichkeit, dass E_k nicht interessant ist, und schließlich $r_k = p_k/q_k$. Der Quotient r_k hat im Englischen (nicht aber im Deutschen) einen speziellen Namen: »odds«; daher der Name für unser Hauptresultat.

Wir schreiben die p_k, q_k und r_k alle untereinander, und zwar mit dem letzten ($k = n$) beginnend:

$p_n,\ p_{n-1},\ p_{n-2}, \ldots$

$q_n,\ q_{n-1},\ q_{n-2}, \ldots$

$r_n,\ r_{n-1},\ r_{n-2}, \ldots$

Jedes r_k ist der Quotient der Zahlen darüber. Nun summieren wir die r_k von links nach rechts, bis der Wert 1 erreicht oder gerade überschritten wird. Anders ausgedrückt: Wir bilden, von n rückwärts zählend, die Summe $R_s = r_n + r_{n-1} + \ldots + r_s$, bis R_s erstmals größer oder gleich 1 wird. Die Nummer s, bei der das geschieht, nennen wir den »Stoppindex«. Wenn die Summe 1 bis zum Schluss nicht erreicht wird, setzen wir $s = 1$. Nun multiplizieren wir noch alle q_k von n rückwärts bis s auf und erhalten $Q_s = q_n \cdot q_{n-1} \cdot \ldots \cdot q_s$. Damit lautet unsere Strategie:
Man warte bis zum Ereignis mit der Nummer s und stoppe dann bei der ersten Gelegenheit (wenn es noch eine gibt).
Diese Strategie ist optimal. Ihre Erfolgswahrscheinlichkeit W ist das Produkt $W = R_s \cdot Q_s$.

Für unsere Beispiele ergeben sich folgende Lösungen: Beim Würfelspiel gilt $p_k = 1/6$ und damit $q_k = 5/6$ und $r_k = p_k/q_k = 1/5$ für alle k. Rückwärts aufaddiert, 1/5 + 1/5 + …, wird der Wert 1 (genau) nach dem fünften Schritt erreicht. Also ist es optimal, bei der ersten Sechs ab dem fünftletzten Wurf zu stoppen. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $R_s \cdot Q_s = 1 \cdot (5/6)^5 = 0{,}4019$, also gut 40 Prozent.

Für den Sportwagen: Nehmen wir an, es gebe acht ernsthafte Interessenten. Ohne Zusatzinformation hat das k-te Angebot die Wahrscheinlichkeit $p_k = 1/k$ für sich, das bisher beste zu sein (siehe oben). Dies gilt auch für $k = 1$! Das erste Angebot ist immer das bisher beste (auch wenn es für Sie nicht in Frage kommt). Die Unabhängigkeit der Gelegenheiten folgt in diesem Fall aus einem Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie (Satz von Rényi über relative Ränge innerhalb von Reihen gleichwahrscheinlicher Beobachtungen). Daher gilt $p_k = 1/k$, $q_k = (k-1)/k$ und damit $r_k = 1/(k-1)$. Die Reihe $r_8 + r_7 + \ldots$ ergibt die Summe 0,1428 + 0,1666 + 0,2 + 0,25 + 0,3333 = 1,093; mit dem letzten Summanden ist die Eins überschritten, und es ergibt sich $s = 4$. Ab dem vierten Besu-

In unserem Modell hingegen ist ein Erfolg nicht nur der bisher beste Preis, sondern der beste überhaupt erzielbare. Nichts gegen einen frühen Verkaufsabschluss, der durchaus optimal sein kann, aber man darf nicht Dinge vergleichen, die nicht vergleichbar sind. In unserem Modell liegt die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgs oder Pseudoerfolgs, wie man zeigen kann, tatsächlich immer über 63,4 Prozent, einerlei wie viele Angebote eingehen.

Das gilt so oder so ähnlich für fast alle Anwendungsbereiche, auch für den Politiker, der auf die beste Gelegenheit wartet, vor dem Wahlkampf seine Hauptargumente möglichst wirkungsvoll einzusetzen, oder den Manager, der auf einen besten Zeitpunkt für einen Börsengang setzt. Unsere Definition eines Erfolgs ist anspruchsvoll, und wenn ein solcher Erfolg eintritt, bedeutet er sehr viel. ▷

Der nächste Kaufinteressent könnte noch zahlungsfreudiger sein – oder ein Geizkragen.

cher sollten wir also zusagen, wenn er ein *H* bietet. Die Wahrscheinlichkeit für das Optimum ist $W = R_s \cdot Q_s = 1{,}093 \cdot 0{,}375 = 0{,}4099$, also rund 41 Prozent.

Beim klinischen Versuch kann man die p_k (und damit die r_k) nicht durch einfache Überlegungen finden. Sie müssen aus Anfangsbeobachtungen geschätzt werden.

Alle anderen Argumente bleiben im Wesentlichen gültig. Nach wie vor ist die Stoppzahl s definiert als diejenige Ereignisnummer k, für die erstmals im Verlauf der Ereignisse $r_{k+1} + \ldots + r_{n-1} + r_n < 1$ gilt (das ist nur eine Umformulierung der obigen Bedingung). Nur sind die Werte $r_{k+1}, \ldots, r_n$ und damit auch s unbekannt. Aber wir können sie aus den bisherigen Beobachtungen schätzen, und zwar umso besser, je mehr Ereignisse wir beobachten konnten.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass die p_k alle gleich sind, also $p_k = p$ mit unbekanntem p. Der Würfel ist gezinkt, und wir wissen nicht wie, aber es ist immer derselbe Würfel, der geworfen wird. Wir wissen nicht, wie gut das neue Medikament wirkt, aber mangels besseren Wissens nehmen wir an, dass es für alle Patienten die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit hat. Dann sind auch alle r_k gleich, $r_k = r$ mit unbekanntem r, und die Bedingung $r_{k+1} + \ldots + r_n < 1$ wird zu $(n - k)\, r < 1$ oder $n - k < 1/r$.

Die Idee ist nun, das unbekannte r in dieser Bedingung durch einen Schätzwert namens $\hat{r}_k$ zu ersetzen, der aus allen Beobachtungen bis zur k-ten berechenbar ist. Eine solche Berechnungsvorschrift nennen die Statistiker einen »Schätzer«. Er muss zwei wichtige statistische Bedingungen erfüllen; sie heißen asymptotische Erwartungstreue und Konsistenz. Außerdem soll er möglichst bequem zu berechnen sein.

Wie man zeigen kann, bietet der Schätzer $\hat{r}_k = G_k/(k + 1 - G_k)$ alle gewünschten Eigenschaften. Dabei ist G_k die Anzahl der beobachteten Gelegenheiten bis zur Zeit k einschließlich. Die revidierte Odds-Strategie lautet also:

Wenn das k-te Ereignis eine Gelegenheit bietet, so nimm sie wahr, wenn $n - k < (k + 1 - G_k)/G_k$; ansonsten warte ab.

(Man bemerke, dass automatisch $G_k \geq 1$ ist.) Diese Strategie ist asymptotisch optimal und allgemein eine gute Annäherung an die optimale Strategie.

Die Anzahl der Nicht-Gelegenheiten bis zum k-ten Ereignis ist $k - G_k$. Üblicherweise ist die relative Häufigkeit eine gute Schätzung für die Wahrscheinlichkeit; also wäre G_k/k ein guter Schätzer für p und $(k - G_k)/k$ ein guter Schätzer für q. Dann müsste doch $G_k/(k - G_k)$ ein guter Schätzer für r sein. Warum steht dann bei $\hat{r}_k$ im Nenner $k + 1$ statt k? Erstens ist der Quotient zweier Schätzer nicht unbedingt ein guter Schätzer für den Quotienten; zweitens und vor allem aber fragen wir unseren Schätzer immer nur dann, wenn es etwas zu fragen gibt, wenn also unser letztes Ereignis eine Gelegenheit ist. Wenn wir diese Auswahl aus allen denkbaren Situationen treffen, überschätzen wir systematisch den Anteil der Gelegenheiten und damit die Wahrscheinlichkeit p; diese Verzerrung wird dadurch korrigiert, dass man das k in der Formel für $\hat{r}_k$ durch $k + 1$ ersetzt; das kann man durch Nachrechnen beweisen.

Wenn aber die Odds untereinander verschieden sind, bleibt das Problem nur sinnvoll, wenn man die r_k trotzdem noch aus den bisherigen Beobachtungen schätzen kann. Ein wichtiger Fall ist $p_k = p \cdot f_k$: Die neue Behandlung hat »für sich genommen« die unbekannte Erfolgswahrscheinlichkeit p. Aber je schlechter es dem Patienten geht, desto mehr sinken die Aussichten. Das wird durch den Faktor f_k mit $0 < f_k < 1$ für den (bekannten) Gesundheitszustand des k-ten Patienten ausgedrückt. In solchen Fällen kann der Algorithmus wie zuvor angewandt werden.

Ärzte und Verantwortliche in der pharmazeutischen Industrie werden den Odds-Algorithmus mit einer gewissen Skepsis betrachten. Das ist womöglich gerechtfertigt, denn medizinisch-pharmazeutische Entscheidungsprobleme zählen zu den schwierigsten überhaupt.

Die Bewertung einer Behandlung (als Erfolg oder Misserfolg) kann mehr Zeit beanspruchen, als für die nächste Entscheidung zur Verfügung steht. Dies verlangsamt die Schätzung der p_k, da Teilinformationen ausbleiben. Das mathematische Modell selbst steht deshalb jedoch nicht in Frage.

Oder ein verzweifelter Patient besteht auf einem Versuch, von dem nach den bisherigen Erfahrungen aus statistischen Gründen abzuraten ist. Der gute Arzt wird diese Gründe darlegen und mit Nachdruck wiederholen. Wenn der Wille des Patienten durch wahrscheinlichkeitsbedingte Argumente nicht beeinflussbar ist, so ist dies eine Priorität des Patienten (die der Arzt im Allgemeinen respektiert und respektieren darf), aber es ist dann kein medizinisch-strategisches Entscheidungsproblem mehr.

Häufig gelten Entscheidungen, die auf Basis statistischer Überlegungen getroffen werden, als kalt und herzlos. Man muss sich klarmachen, dass das Gegenteil der Fall ist. Die Statistik ist ein Mittel zu einem Ziel, das höchsten Respekt verdient: mit maximaler Wahrscheinlichkeit alle erhoffbaren Erfolge abzudecken, ohne unnötiges Leiden zu verursachen.

Eine Strategie für viele Gelegenheiten

Was kann der Odds-Algorithmus Ihnen, lieber Leser, bieten? Mehr, als es auf den ersten Blick den Anschein hat. Denn seine Flexibilität macht ihn oft an unerwarteter Stelle anwendbar.

Sie sind Politiker und möchten Ihre Wahl gewinnen? Dann müssen Ihre Argumente nicht nur stichhaltig sein, sondern auch im richtigen Moment angebracht werden. Wie schade ist es doch zu sehen, wie ein Argument, das noch vor wenigen Monaten so überzeugend war, nun kurz vor der Wahl seine Wirkung verfehlt. Eine Wiederholung nützt auch nicht mehr viel. Die Argumente der Gegenpartei sind mittlerweile gereift.

Aus diesem Grund spielt auch hier die letzte Chance – nämlich das Argument wirkungsvoll vorzubringen – eine besondere Rolle. Aber wer weiß schon im Voraus, wie viele Ereignisse und wie viele Gelegenheiten es geben wird? Hier kommt uns die Einfachheit der Modellannahmen zugute. Gelegenheiten werden schlicht als interessante Ereignisse definiert, und Nicht-Ereignisse sind einfach ein Spezialfall von uninteressanten Ereignissen. Folglich genügt es, jeden Tag k als ein Experiment anzusehen, aus dem mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit e_k ein Ereignis hervorgeht, das seinerseits mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit g_k interessant ist. Unter der Annahme der Unabhängigkeit können wir dann $p_k = e_k \cdot g_k$ setzen und den Odds-Algorithmus anwenden.

Nehmen wir an, eines Ihrer Argumente betrifft Arbeitslosigkeit. Die Ge-

Warum ist die Odds-Strategie optimal?

Der Beweis verläuft in mehreren Schritten. Zunächst beschränken wir uns auf Strategien, die dem Muster der Odds-Strategie folgen, das heißt, eine gewisse Anzahl von Ereignissen abwarten und dann bei der ersten Gelegenheit stoppen. Nur der Stoppindex, das heißt die Anzahl der abzuwartenden Ereignisse, kann variieren.

Um zu zeigen, dass unter diesen Strategien – nennen wir sie die »Stoppindex-Strategien« – die Odds-Strategie die optimale ist, genügt es im Prinzip, alle denkbaren Ereignisfolgen aufzuzählen, auf jede von ihnen die konkurrierenden Strategien anzuwenden und festzustellen, dass die Odds-Strategie die größte Erfolgswahrscheinlichkeit aufweist. Wenn man das nicht für einen Einzelfall, sondern in voller Allgemeinheit tun will, muss man einiges an mühsamer Rechenarbeit aufwenden, aber es geht.

Glücklicherweise hält die Wahrscheinlichkeitstheorie Handwerkszeug bereit, das einem das Wühlen in verschiedenen, kompliziert zusammenzufassenden Einzelfällen erspart. Man ordnet jedem zukünftigen (noch nicht eingetretenen) Ereignis eine Zufallsvariable zu, die den Wert 1 (Gelegenheit) mit Wahrscheinlichkeit p_k und den Wert 0 (keine Gelegenheit) mit Wahrscheinlichkeit q_k annimmt. Wir haben genau dann gewonnen, wenn die Summe dieser Zufallsvariablen den Wert 1 annimmt. Diese umständliche Ausdrucksweise dafür, dass noch genau eine Gelegenheit kommt (bei der wir dann stoppen), nicht mehr und nicht weniger, ist ein wesentlicher Trick.

Mittels so genannter erzeugender Funktionen findet man dann einen eleganten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass die genannte Summe den Wert 1 annimmt. Dabei geht die Voraussetzung ein, dass diese Zufallsereignisse unabhängig voneinander sind. Mit dem so gewonnenen Ausdruck rechnet man weiter und findet, dass unter allen Stoppindex-Strategien die Odds-Strategie die optimale ist.

Außer den Stoppindex-Strategien sind noch viele andere denkbar, gegenüber denen sich die Odds-Strategie als überlegen erweisen muss. Nur bringen diese alternativen Strategien nichts ein, weil es keine Zusatzinformation gibt, aus der sie noch mehr Erfolgswahrscheinlichkeit herausholen könnten. Insbesondere kann man in unserem ursprünglichen mathematischen Modell aus den bisherigen Beobachtungen nichts lernen, denn die p_k sind ja vorab festgelegt. Diesen intuitiv einleuchtenden Sachverhalt kann man formal korrekt beweisen, indem man zeigt, dass unser Modell einen so genannten »monotonen Fall« darstellt; Näheres dazu findet sich unter diesem Namen in der Literatur.

Es kommt ein absolut unwiderstehliches Angebot, und dass noch ein besseres kommt, ist völlig ausgeschlossen, hat also die Wahrscheinlichkeit null? Das kann in der Realität vorkommen, aber nicht in unserem mathematischen Modell, bei dem die p_k ja vorab festgelegt sind. Wenn es in der Realität vorkommt: Konstatieren Sie, dass die Voraussetzungen des mathematischen Modells nicht mehr zutreffen, und greifen Sie zu!

Wie viele Gelegenheiten werden sich in den nächsten zwei Monaten ergeben, mit Äußerungen zum Thema Arbeitslosigkeit Aufmerksamkeit zu erregen? Ein paar einfache Abschätzungen schaffen Klarheit.

genpartei hält sich mit Äußerungen zurück und sagt im Schnitt nur alle zwei Wochen etwas dazu. Setzen Sie $e_k = 1/14$. Wenn Sie die Chance, dass etwas gesagt wird, worauf Ihre Antwort ihre Wirkung nicht verfehlen dürfte, auf eins zu drei schätzen, könnten Sie $g_k = 1/3$ und somit $p_k = e_k \cdot g_k = 1/42$ setzen. Das wäre das einfachste Modell. Oft wissen Sie mehr, zum Beispiel wann die nächsten Arbeitslosendaten bekannt werden. Schätzen Sie, in welcher Richtung sich die e_k oder g_k verändern werden. Lassen Sie die Werte dementsprechend variieren.

Überprüfen Sie Ihre Hypothesen, aber haben Sie keine übertriebene Angst vor unrichtigen Annahmen! Denn deren Auswirkungen werden durch gute Strategien typischerweise gelindert, nicht verschlimmert. Aber gehen Sie breit gefächert vor. Ein Modell für jedes Ihrer wichtigen Argumente, und schon haben Sie mit wenig Arbeit ein Arsenal durchdachter Strategien bereit.

Oder Sie spekulieren an der Börse? Nicht dass ich Sie dazu ermutigen möchte; aber wenn Sie es sowieso tun, mag der folgende Denkanstoß hilfreich sein.

Das Traumziel jedes Spekulanten ist es, in einer vorgegebenen Periode zum Tiefstpreis zu kaufen oder zum Höchstpreis zu verkaufen. Dies ist kein intelligentes Ziel; die Erfolgschancen sind im Allgemeinen zu gering. Preise sind außerdem von Preisen des Vortags nicht unabhängig, sodass unsere Modellannahmen und damit der Odds-Algorithmus für das Traumziel nicht anwendbar sind.

Betrachten wir ein anderes Ziel wie zum Beispiel den Kauf im letzten lokalen Minimum, das die Börsianer »down« oder »cup« nennen. Das ist ebenfalls ein Erfolg, denn wir können dann am folgenden Börsentag, wenn auch vielleicht nur mit kleinem Gewinn, wieder verkaufen. Diesmal ist eine Gelegenheit nicht durch einen Preis, sondern durch den Preisunterschied zum Vortag definiert; damit wird die Unabhängigkeitsannahme vertretbar. Die Schätzung der Wahrscheinlichkeit eines cup ist auch für professionelle Spekulanten heikel, doch wesentlich leichter als die Schätzung der Gesamtentwicklung des Preises! Wir haben also das Problem für die Anwendung des Odds-Algorithmus angepasst.

Juristische Aspekte

Gründe, die zur Zeit einer wichtigen Entscheidung gut erschienen, verblassen, sobald sich herausstellt, dass die Entscheidung falsch war. Wer einen »Fehler« gemacht hat, ist immer in der Defensive. So ungerecht ein Vorwurf auch sein mag, er hält sich oft lange.

Im schlimmsten Fall geht es bis zum Untersuchungsausschuss. Mit der Kenntnis des Odds-Algorithmus, so bescheiden er auch aussehen mag, haben wir dann etwas Unanfechtbares auf unserer Seite: Optimalität. Man kann auf Fahrlässigkeit, Unehrenhaftigkeit und mancherlei anderes verklagen, aber niemals, wirklich niemals auf Pech. Wer zeigt, dass er eine Strategie formuliert hat, beweist, dass er über das Problem nachgedacht hat. Der Vorwurf der Fahrlässigkeit wird unhaltbar. Wer zudem eine optimale Strategie kennt, braucht keinen Verweis auf eine bessere Strategie zu fürchten, die man angeblich kennen müsste.

Also bleibt Ihrem Gegner höchstens der Versuch, Ihnen falsche Hypothesen nachzuweisen? Dies wäre extrem schwierig. Hypothesen sind bei unbekannter Zukunft *per definitionem* mit positiver Wahrscheinlichkeit falsch. All dies macht potenzielle Kläger machtlos. Es unterstreicht zugleich, dass wir, auch vom juristischen Standpunkt aus, jeder anwendbaren optimalen Strategie ein besonderes Interesse entgegenbringen sollten. ◁

AUTOR UND LITERATURHINWEISE

F. Thomas Bruss ist Professor für Mathematik und Präsident des Fachbereichs Mathematik der Freien Universität Brüssel (Université Libre de Bruxelles). Einer seiner Forschungsschwerpunkte ist die Entwicklung mathematischer Modelle für Strategien und ihre Anwendungen.

A note on bounds for the Odds-Theorem of optimal stopping. Von F. Thomas Bruss in: Annals of Probability, Bd. 31, S. 1859, 2003

Sum the odds to one and stop. Von F. Thomas Bruss in: Annals of Probability, Bd. 28, S. 1384, 2000

The theory of optimal stopping. Von Y. S. Chow, Herbert Robbins und David Siegmund. Dover, New York 1991